

1 MAR 1988

Tecniche "Monte Carlo" nell'analisi di curve di luce di variabili ad eclisse: V546 Cyg.

1) Introduzione

V546 Cyg (VV1) e' la prima stella variabile scoperta da W.J. Miller durante il suo ormai noto survey fotografico nelle costellazioni di Cepheus e Lacerta (Miller, 1950).

Questa stella e' una variabile ad eclisse la quale e' situata a meno di un grado di distanza da Eta Cyg.

Le sue coordinate riferite al 1950.0 sono le seguenti:

$$AR(1950) = 19h 54m 20s$$

$$DB(1950) = +34 15'.5$$

Le sue caratteristiche sono (GCVS, 1985 vol.2):

$$Max. = 15.1 pg$$

$$Min.1 = 16.3 pg$$

$$Min.2 = 15.2 pg$$

L'effemeride relativa al minimo primario e' la seguente:

$$Min.1 = JDo 2425450.240 + 59.547288 * E$$

In piu' si hanno i seguenti dati supplementari:

$$D = .094 * P$$

$$(Min.2 - Min.1) = .480 * P$$

Il tipo spettrale di V546 Cyg e' approssimativamente noto essendo stato stimato da Miller e risulta essere: K-M.

Tale stella e' situata nella nebulosa oscura Barnard 144.

2) Osservazioni

Le osservazioni ottenute da W.J. Miller per la stella in esame sono totalmente 684 le quali coprono un periodo osservativo di 18518 giorni pari a 311 cicli approssimativamente.

La lunghezza d'onda equivalente a cui le osservazioni sono state ottenute e', dipendentemente dal materiale fotografico impiegato e dalle tecniche adottate per il trattamento, intorno ai 4200 Å, almeno secondo le indicazioni fornite da W.J. Miller.

Oltre le 684 lastre citate precedentemente sono state anche ottenute, sempre dallo stesso autore 18 lastre nel rosso, a circa 6280 Å.

Il confronto tra il materiale nei due colori ha permesso di ottenere la stima del tipo spettrale riportato precedentemente.

Dalle 684 lastre nel blu sono stati ottenuti i 39 punti normali che compongono la curva di luce mostrata nella figura 1.

Basta un'occhiata a tale figura per notare che V546 Cyg possiede una curva di luce piuttosto insolita la quale unita al periodo di 59.5 giorni e al tipo spettrale avanzato suggerisce per la stella in esame una natura somigliante, su una scala periodale piu' ridotta, a quella di Epsilon Aurigae o a quella di stelle simili.

Tale tipologia rappresenta gia' un sintomo riguardo la difficoltà di soluzione

ella sua curva di luce sulla base dei metodi tradizionali.

b) Soluzione della curva di luce

a) Metodo classico

La curva di luce riportata in figura 1 e' stata preventivamente risolta per la prima volta da J. DeKort (1952) il quale incontro' un notevole numero di 'difficolta'.

egli fu costretto a riformare da capo i punti normali usando sempre le osservazioni di Miller e ad introdurre uno speciale criterio di pesatura per essi, ad hoc, al fine di ottenere una soluzione, basata sul modello di Sosirev ipotizzando un sistema composto da una stella blu molto calda circondata da una atmosfera estesa e da una gigante rossa piu' fredda. De Kort conclude pero' che i parametri orbitali rimangono largamente indeterminati.

La stessa conclusione e' stata tratta da Gaspani durante innumerevoli tentativi condotti sia in Frequency che usando il programma EVLCS: la conclusione a cui si arriva e' che non esiste un soddisfacente modello sferico o distorto capace di riprodurre la curva di luce osservata.

b) Modello a disco

Da questo punto vista la necessita' di trovare un modello alternativo e ricordando che curve di luce simili a quella di V546 Cyg sono state spiegate con un modello del sistema binario in cui la principale e' una stella piu' o meno sferica e la secondaria e' un oggetto discoidale o toroidale, si e' deciso di adottare un modello simile anche per la stella in esame.

In questo caso il problema, visto dal punto di vista computazionale, si complica in quanto e' necessario specificare, almeno in prima approssimazione, la geometria dell'oggetto discoidale eclissante e qualche sua proprieta' dal punto di vista fotometrico.

Le approssimazioni adottate nel presente caso sono state le seguenti:

- 1) Disco a simmetria cilindrica
- 2) Disco con proprieta' fotometriche omogenee
- 3) Disco complanare con il piano orbitale.

Dopo queste premesse (e approssimazioni) i parametri orbitali del sistema binario divengono i seguenti:

R1 : raggio frazionario della stella eclissata
 L1 : luminosita' frazionaria della stella eclissata
 Rd : raggio frazionario del disco
 Hd : spessore frazionario del disco
 Ld : luminosita' frazionaria del disco
 |i| : inclinazione orbitale
 ul : limb-darkening della stella eclissata.

In effetti per definizione si ha:

$$L1 + Ld = 1$$

In piu' il periodo orbitale elevato ci consente di assumere con ragionevole sicurezza : |i|=90 gradi
 Per quanto riguarda il limb darkening ul esso deve essere fissato

ragionevolmente sulla base del tipo spettrale e della lunghezza d'onda di osservazione per cui rimangono liberi e da determinare i quattro parametri geometrici: R1, L1, Rd, Hd.

A questo proposito l'unica via per ottenerli e' un processo di ottimizzazione che minimizzi la funzione S(X) tale che sia:

1 APR. 1980

$$j=N$$

$$S(X) = \sum_{j=1}^N \{l(\text{obs}) - l(\text{calc})\}^2 \quad (1)$$

don: $l(\text{calc}) = l(X, f)$ e $X = [R1, L1, Rd, Hd]^T$

ove $l(\text{obs})$ sono le luminosita' osservate (dei punti normali della curva di luce) e $l(X)$ sono quelle sintetiche e dipendenti dal vettore X dei parametri orbitali) liberi entrambe riguardanti la stessa fase orbitale f .

b) La funzione obbiettivo

La funzione obbiettivo $S(X)$ contiene come e' stato visto in precedenza la luminosita' sintetica $l(X)$ la quale puo' essere definita come:

$$l(X, f) = 1 - A(Y, f) * L1 \quad (2)$$

ove: $Y = [R1, Hd, Rd]^T$

$A(Y, f)$ e' la frazione di area della stella principale eclissata dal disco ad una certa fase f .

La quantita' $A(Y, f)$ e' esprimibile come:

$$A(Y, f) = \int_{-R1}^{R1} \int_{-Hd/2}^{Hd/2} Z(x, y) * dx * dy \quad (3)$$

ove la funzione $Z(x, y)$ rappresenta il profilo dell'oggetto discoidale proiettato sulla stella eclissata.

L'originr delle coordinate e' situato nel centro della stella eclissata).

La soluzione dell'integrale (3) e' difficoltosa e richiede di specificare in anticipo la geometria del disco eclissante.

Nel caso presente la $Z(x, y)$ e' stata approssimata con una funzione rettangolare.

Al fine di ottenere una determinazione di $A(Y, f)$ sufficientemente precisa

e' stato necessario procedere per via numerica.

La procedura di valutazione di $A(Y, f)$ va ripetuta per ognuno dei punti normali

osservati in maniera da ottenere ciascuna delle valutazioni teoriche di $l(X)$

necessarie per costruire la curva di luce sintetica per ogni set di parametri

orbitali e quindi per ottenere la valutazione della funzione obbiettivo $S(X)$

da minimizzare mediante un opportuno algoritmo.

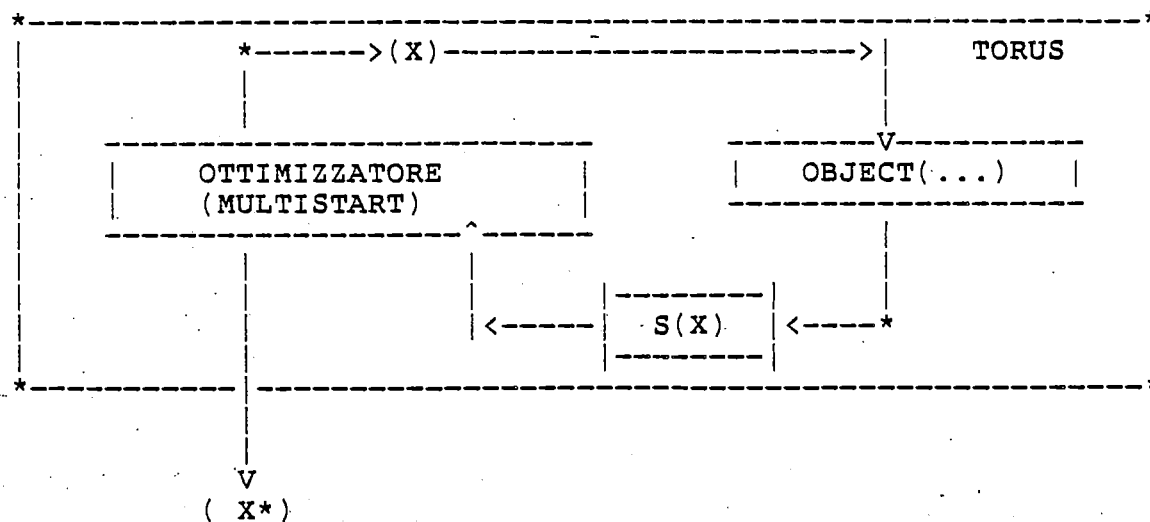
b) Il programma TORUS

Come visto in precedenza data una scelta arbitraria di elementi del vettore X

e' possibile avere in output una valutazione della funzione obbiettivo $S(X)$.

Di conseguenza usando una strategia opportuna e' possibile ottimizzare X in modo da minimizzare $S(X)$.

A tale fine e' stato costruito il programma TORUS il quale possiede la seguente struttura modulare:



I moduli che compongono il TORUS sono principalmente due:

- a) una routine (OBJECT) capace di calcolare la funzione obbiettivo $S(X)$ eseguendo numericamente la integrazione (3).
- b) Un modulo ottimizzatore di tipo SOA (Stochastic Optimization Algorithm) che esegue il miglioramento del vettore X sulla base della funzione $S(X)$ passatagli dal modulo OBJECT, mediante tecniche Monte Carlo (adattive).

Per quanto riguarda il modulo OBJECT, la sua funzione e' in pratica gia stata descritta in precedenza, mentre e' interessante il modo di lavorare dello ottimizzatore.

b) Il modulo MULTISTART

Dato un vettore $X(k)$ il quale fornisce una certa funzione obbiettivo $S(k)$ (alla iterazione k) esso identifica un punto su una ipersuperficie in uno spazio NP -dimensionale dove NP e' il numero degli elementi di quel vettore. Eseguendo una esplorazione random su un iperparallelepipedo di lati fissati orientato secondo le NP direzioni, generando M vettori random con una distribuzione $F(X,z)$ con $z=z(k)$ centrata su $X(k)$ si ha una certa probabilita' $P(k)$ di generare un vettore $X(k+1)$ tale che:

$$S(k+1) < S(k)$$

a meno che un punto di ottimo sia stato raggiunto.

Il passo successivo sara' quello di centrare la distribuzione $F(X,z)$ con $z=z(k+1)$ ora, sul nuovo punto individuato dal vettore $X(k+1)$ e ripetere il processo.

KARNAPP (1973) ha dimostrato che per un numero sufficiente di vettori generati la probabilita' $P(z)$ di raggiungere quello tale che la funzione obbiettivo sia minimale, tende a 1.0.

La convergenza pero' puo' essere verso un ottimo locale per cui l'algoritmo puo' essere modificato in modo tale da innescare L processi indipendenti di ricerca simultanea partendo da L vettori iniziali sparsi uniformemente su una ipersfera di raggio fissato e centrata sul punto definito dal vettore iniziale $X(0)$.

Se la $S(X)$ e' unimodale tutti gli L processi indipendenti di ricerca convergeranno allo stesso ottimo $X(*)$ altrimenti esistera' una alta probabilita' di individuare tutti gli ottimi locali (se L non e' minore del loro numero...) e di scegliere quello caratterizzato da una $S(X)$ piu' ridotta.

La figura 2 esemplifica il modo di procedere del MULTISTART applicato, per esempio alla funzione di Himmelblau.

La distribuzione $F(X,z)$ si evolve con il procedere delle iterazioni favorevoli (cioe' quelle che producono una diminuzione della funzione obbiettivo) adattando in un certo senso la ricerca al grado di irregolarita' della $S(X)$.

1 ABR. 1968

l'espressione analitica della $F(X,z)$ e' la seguente:

$$F(X,z) = \begin{cases} (1-z)*x(i)**(1/z-1) & \text{se: } -1 < x(i) < 1 \\ 0 & \text{se: } |x(i)| > 1 \end{cases}$$

con: $z=z(k)$ e $|z|$ dispari

la cui chiaramente appare che per $k=1$ ($z(k)=1$) la $F(X,z)$ corrisponde ad una distribuzione uniforme su tale iperparallelepipedo di conseguenza inizialmente il modulo MULTISTART esegue una ricerca uniforme sullo iperparallelepipedo iniziale. proseguendo nel processo di minimizzazione la $F(X,z)$ assume un andamento sempre piu' appuntito in corrispondenza di X aumentando quindi la probabilita' che un vettore random $X(k+1)$ generato sia vicino a $X(k)$ man mano che il processo converge a $X(*)$.

b) Modello ottenuto per V546 Cyg.

L'applicazione alla soluzione della curva di luce di V546 Cyg ha richiesto 4 RUNS sequenziali del programma TORUS ognuno dei quali teso a migliorare i valori ottimizzati del vettore X ottenuti per mezzo del precedente RUN. La scelta di valori iniziali dei parametri liberi e' stata eseguita utilizzando un programma BASIC su un COMMODORE C128 sulla base dei valori delle fasi di inizio e fine eclisse e la sua profondita'. Per ognuno dei 4 RUNS del programma TORUS sono state 20 procedure simultanee di ricerca ognuna delle quali ha generato 10000 vettori random corrispondenti ad altrettanti modelli del sistema binario. In totale nel corso dei 4 RUNS eseguiti, il computer ha simulato 800000 modelli. Il calcolatore usato e' stato un DEC microVAX II e il CPU time totalmente richiesto e' stato di circa 60 minuti, usando come dati in input una serie di 14 punti normali riportati da Miller. La tabella I riporta il summary dei 4 RUNS eseguiti, mentre la tabella II ha' i valori e i parametri ottimali accompagnati dalle loro barre d'errore: $e(X)$ e $s(X)$. Le incertezze $e(X)$ sono le barre d'errore ricavate dalla somma dei quadrati dei residui tra la curva finale teorica e i punti normali osservati, mentre le incertezze $s(X)$ sono gli errori con cui l'algoritmo incluso nel programma TORUS ha determinato il vettore ottimale $X(*)$. Come si nota: $|s(X)| \ll |e(X)|$ per cui l'errore dovuto al processo di ottimizzazione puo' essere trascurato essendo nel caso peggiore di almeno due ordini di grandezza piu' piccolo.

TAB.I : Summary dei RUNS eseguiti

	RUN 1	RUN 2	RUN 3	RUN 4
val. iniziali				
R1	.035	.0346	.0304	.0292
Rd	.270	.2677	.2678	.2683
Hd	.031	.02999	.02935	.02736
L1	.940	.9212	.9375	.9605
val. finali				
R1	.0346	.0304	.0292	.0292
Rd	.2677	.2678	.2683	.2684
Hd	.02999	.02935	.02736	.02721
L1	.9212	.9375	.9605	.9656
S(X)	2.24208E-03	2.24204E-03	2.17484E-03	2.17398E-03
sigl. subRUN	3	18	5	13
iter. favorevoli	223	37	88	38

Tab.2 : Parametri ottimali

parametro	e(X)	s(X)
R1 = .0292	.0007	3.2E-06
Rd = .268	.007	3.2E-06
Hd = .0272	.0003	3.2E-06
L1 = .97	.03	3.2E-06
Ld = .03	-	-

La figura 3 riporta la curva di luce teorica basata sui valori ottimali ottenuti per i parametri orbitali, e plottata tra i punti normali usati per il calcolo.

L'accordo risulta ottimo.

La figura 4 mostra il diagramma dei residui dal quale si ricava una osservazione molto interessante, tale diagramma sarà discusso più oltre.

1) Discussione

Dalla analisi dei risultati ottenuti fino ad ora nel corso del presente lavoro risulta che il modello adottato per V546 Cyg spiega la curva di luce osservata in maniera molto più accurata di qualsiasi modello basato su due stelle più o meno sferiche, di conseguenza, alla luce dei presenti dati a disposizione, si può essere autorizzati a ritenere che il sistema binario in esame almeno somigli al modello qui proposto.

Va ovviamente ricordato che il presente modello è molto grezzo e che è stato calcolato per "zero limb darkening".

Questa scelta è giustificabile in quanto se è possibile l'introduzione nel modello del limb darkening della stella eclissata, non è ben chiaro cosa accada nel caso del disco.

In ogni caso un test di soluzione includendo un coefficiente di limb darkening $u_1 = 0.6$, è stato eseguito con il risultato di ottenere un incremento del raggio frazionario della stella eclissata e cioè:

$$\begin{array}{ll} u_1 = .0 & R_1 = .0292 \pm .0007 \\ u_1 = .60 & R_1 = .0312 \pm .0007 \end{array}$$

In ogni caso visto che il presente modello è solo approssimato, si è preferito riportare in questa sede i risultati ottenuti per $u_1 = 0$.

Osservando la figura 4 e cioè il diagramma dei residui si nota che nella fase di stabilità al minimo principale e cioè $.97 < f < 1.03$ circa si rileva un aumento di luminosità sulla curva di luce.

Grosso modo, come si osserva ancora meglio nella figura 5 si rileva un aumento di circa .05 mag (nel B fotografico).

Tale fatto risulta molto interessante in quanto altre stelle di cui sono stati promossi modelli a disco (BM Ori, Epsilon Aur, ecc...) mostrano lo stesso fenomeno.

Una spiegazione in questa sede non è semplice, però sembra sensato inputarla alla geometria del disco.

Infatti un aumento di luminosità in corrispondenza della fase $f=0$ può essere simulato se invece di un disco omogeneo si suppone che l'oggetto orbitante sia di forma torica per cui la parte centrale dell'anello risulta meno assorbente.

Un'altra possibile simulazione favorevole è quella ottenuta considerando un disco più schiacciato al centro rispetto alla sua periferia.

Cio' comporta una diminuzione della porzione di area eclissata della stella durante il transito del disco su di essa.

In tal caso si avrebbe una diminuzione dell'area eclissata di circa il 2% di quella prodotta dal disco considerato nel corso del presente lavoro.

All'attuale stadio delle cose non è possibile ovviamente pronunciarsi a favore dell'una o dell'altra spiegazione.

1 ABR. 1988

) Conclusioni

el presente lavoro e' stat tentata la costruzione di un modello per V546 Cyg capace di spiegare la curva di luce osservata in maniera piu' consistente dei consueti modelli stella-stella.

Il modello stella-stella disco messo a punto spiega in modo piu' accurato le osservazioni, anche se a questo stadio esso e' ancora poco raffinato.

Al fine di avere una rappresentazione grafica di tale modello si e' provveduto a simulare sulla base dei parametri orbitali ottenuti (Tab.2) mediante 140000 punti random (70000 per ciascuno dei due oggetti) l'immagine grafica del sistema binario.

La routine utilizzata era stata originariamente costruita per risolvere l'integrale (3) usando dei metodi Monte Carlo per l'integrazione, ma l'eccessivo tempo macchina richiesto ha costretto ad optare per per la procedura descritta nella sezione 3).

Tale routine con l'aggiunta di qualche modifica ai fini grafici ha permesso

di ottenere le figure 6,7,8 nelle quali viene mostrato il sistema osservato a fase $f=90$ e/o $f=180$ gradi (fig.6) a fase $f=0$: eclisse primaria (fig.7) e in una direzione perpendicolare al piano orbitale (fig.8).

A. Gaspani

) Bibliografia

De Kort J. : Ric. Astr. vol.2, 15, (1952).

Garnapp D.C.: Automatica, vol.1, (1963).

Miller W.J. : Ric. Astr. vol.2, 7, (1950).

Rubinstein R.Y.: "Monte Carlo Optimization, Simulation and Sensitivity of Queueing Networks", Ed. J. Wiley (New York).

Rubinstein R.Y.: "Simulation and the Monte Carlo Methods", Ed. J. Wiley (N.Y.).

Shreider R.: "Methods of Statistical Testing: Monte Carlo Methods", Ed. Elsevier.

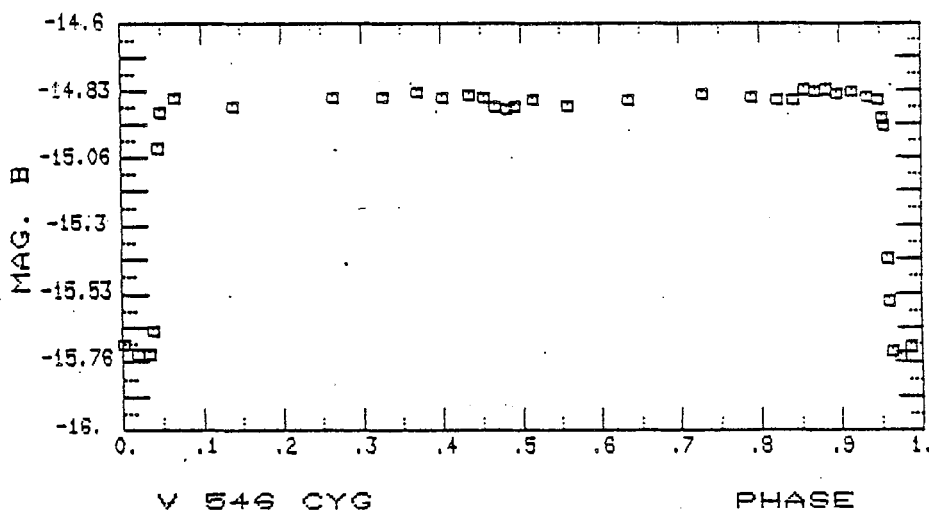


Fig.1: Curva di luce (punti normali) di V546 Cyg.

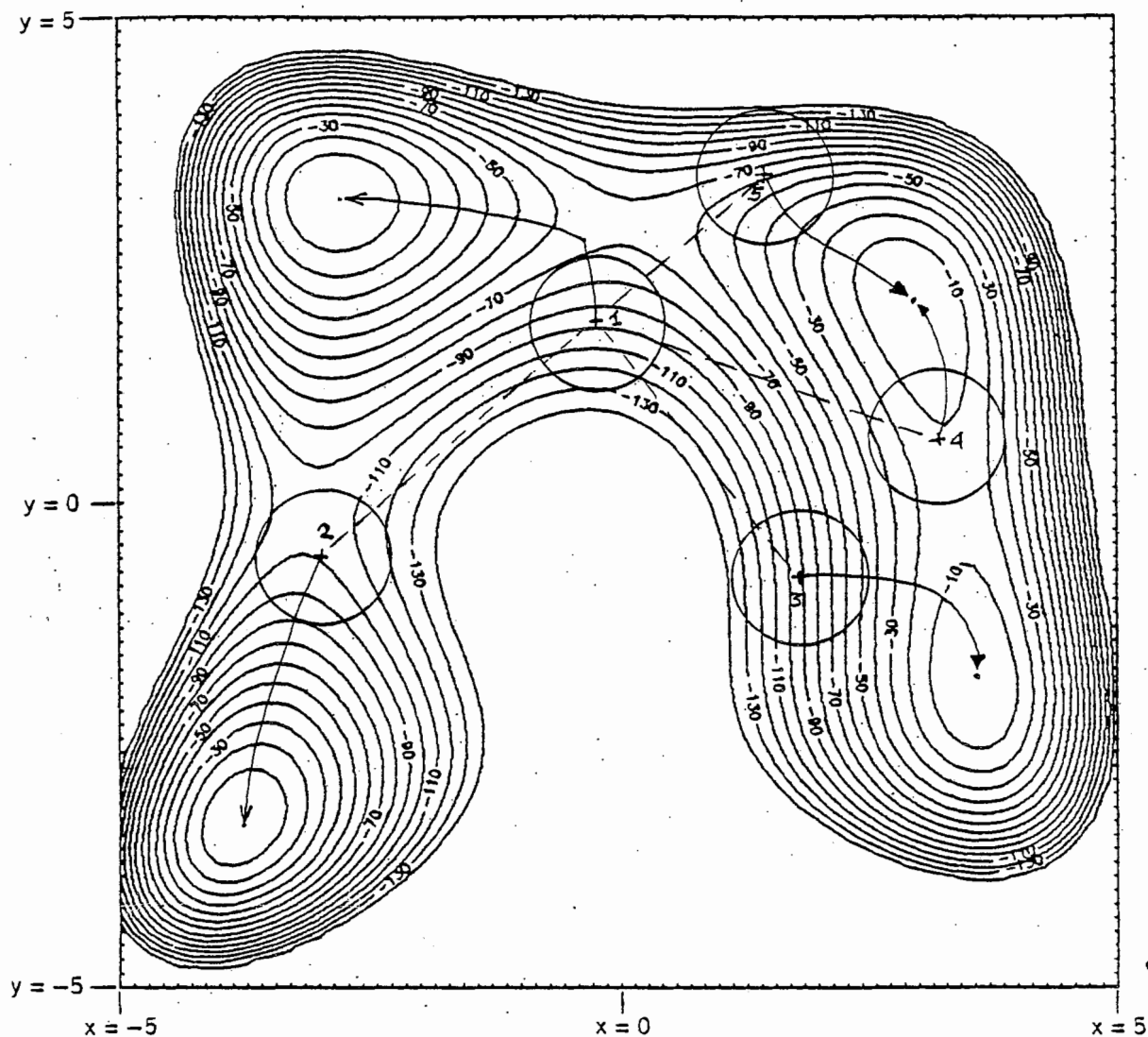


Fig.2: Esempio di ricerca dell'ottimo globale usando la funzione di Himmelblau (bidimensionale):

 Il programma MULTISTART innesca in questo caso 5 subRUNs i cui punti di partenza sono distribuiti su un cerchio (NP=2) di raggio R=5.
 L'ipersfera iniziale di ricerca in questo caso e' di r=1 per ciascun subRUN innescato.
 Si nota che tutti e 4 gli ottimi vengono individuati, in piu' i subRUNs 4 e 5 convergono all'ottimo globale.

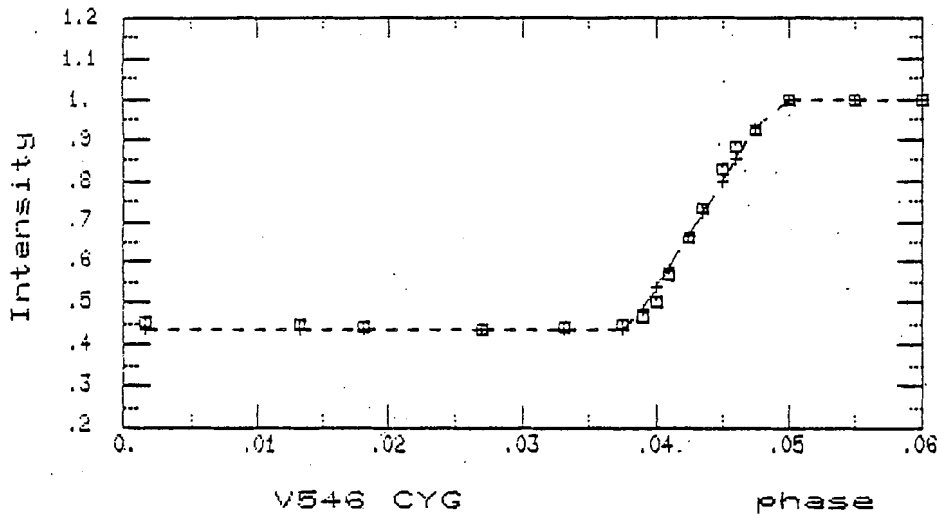


Fig.3: Curva di luce sintetica plottata tra i punti normali osservati.

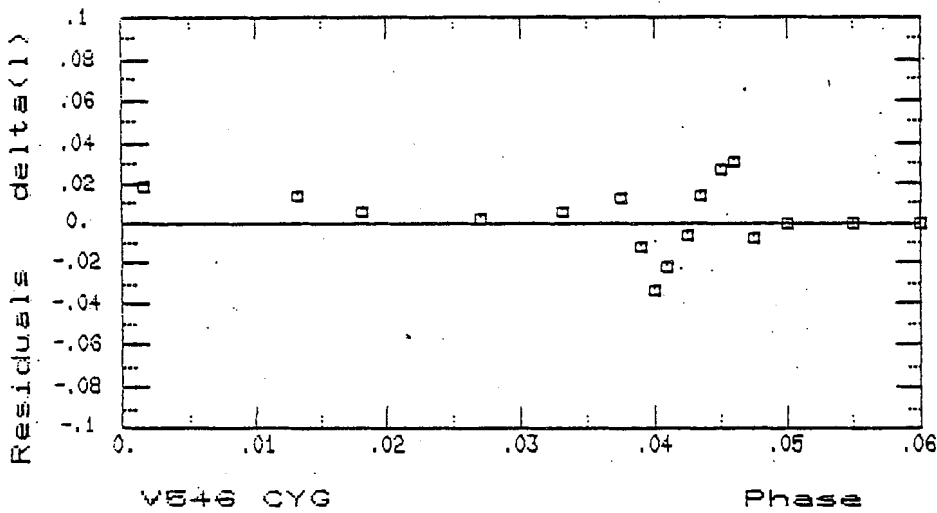


Fig.4: Diagramma dei residui della curva di luce sintetica (modello) rispetto ai punti normali osservati.

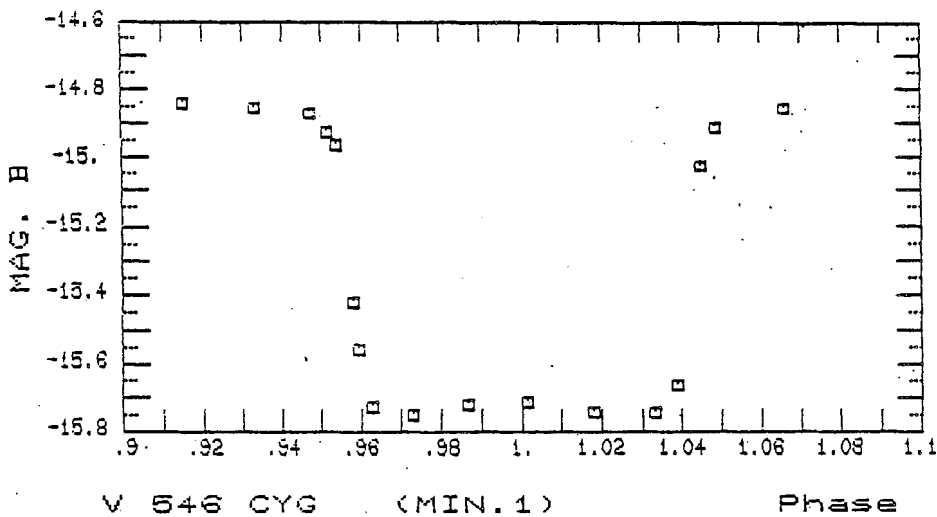


Fig.5: Andamento della curva di luce al minimo principale.

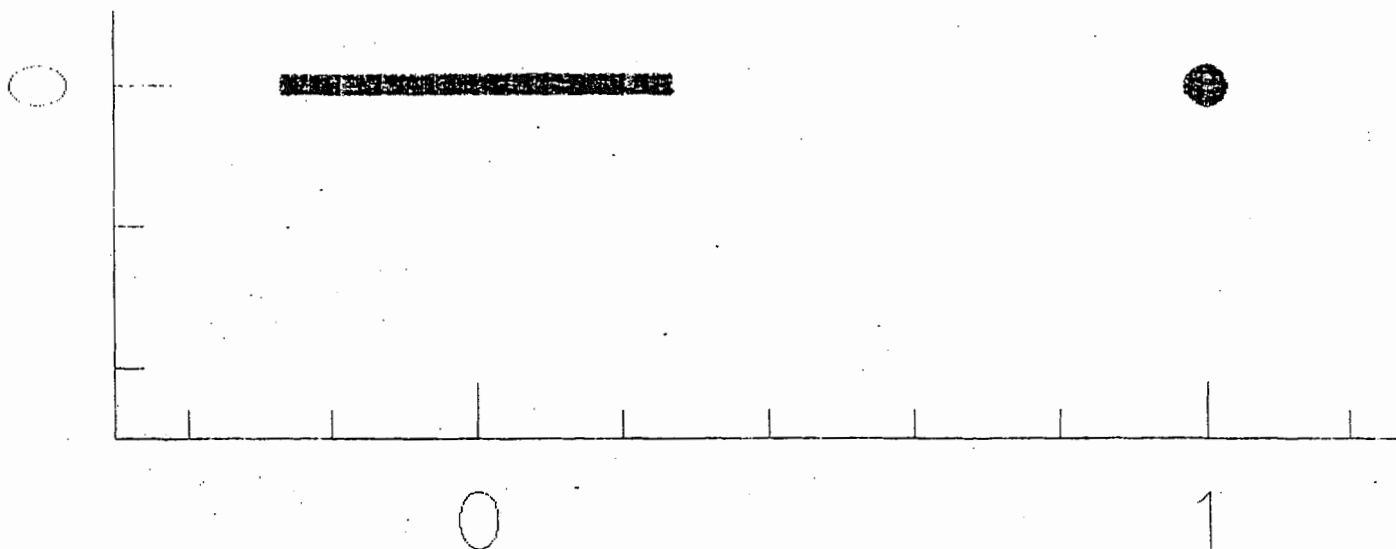


Fig.6: Rappresentazione grafica del modello ottenuta per fase $f=90$ gradi.

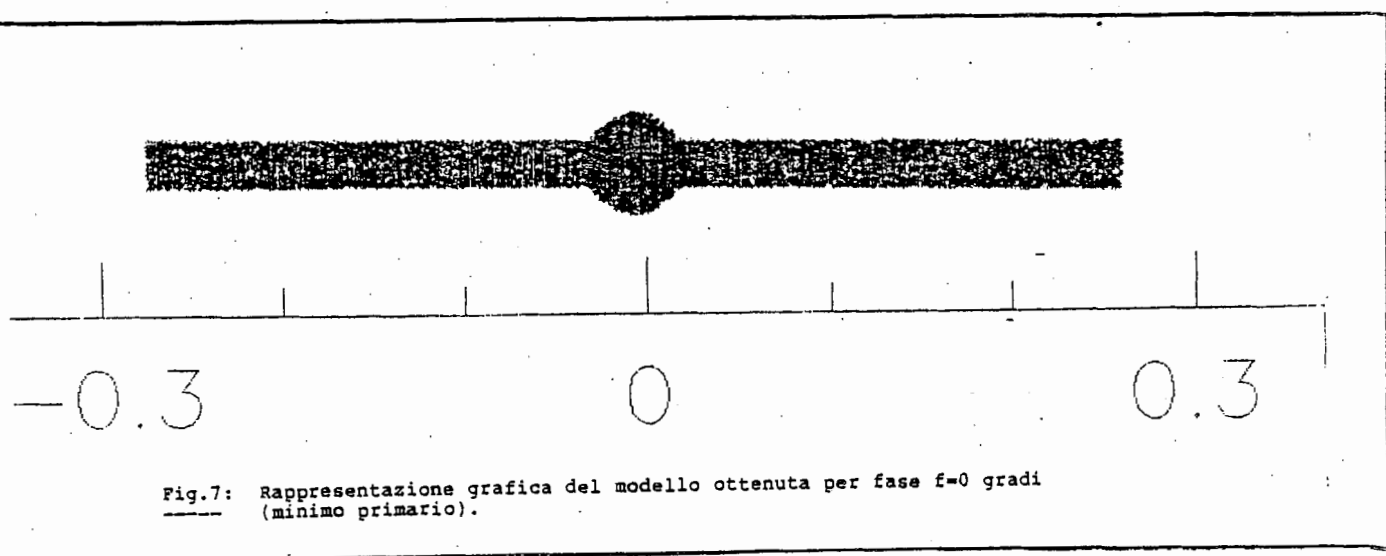


Fig.7: Rappresentazione grafica del modello ottenuta per fase $f=0$ gradi (minimo primario).

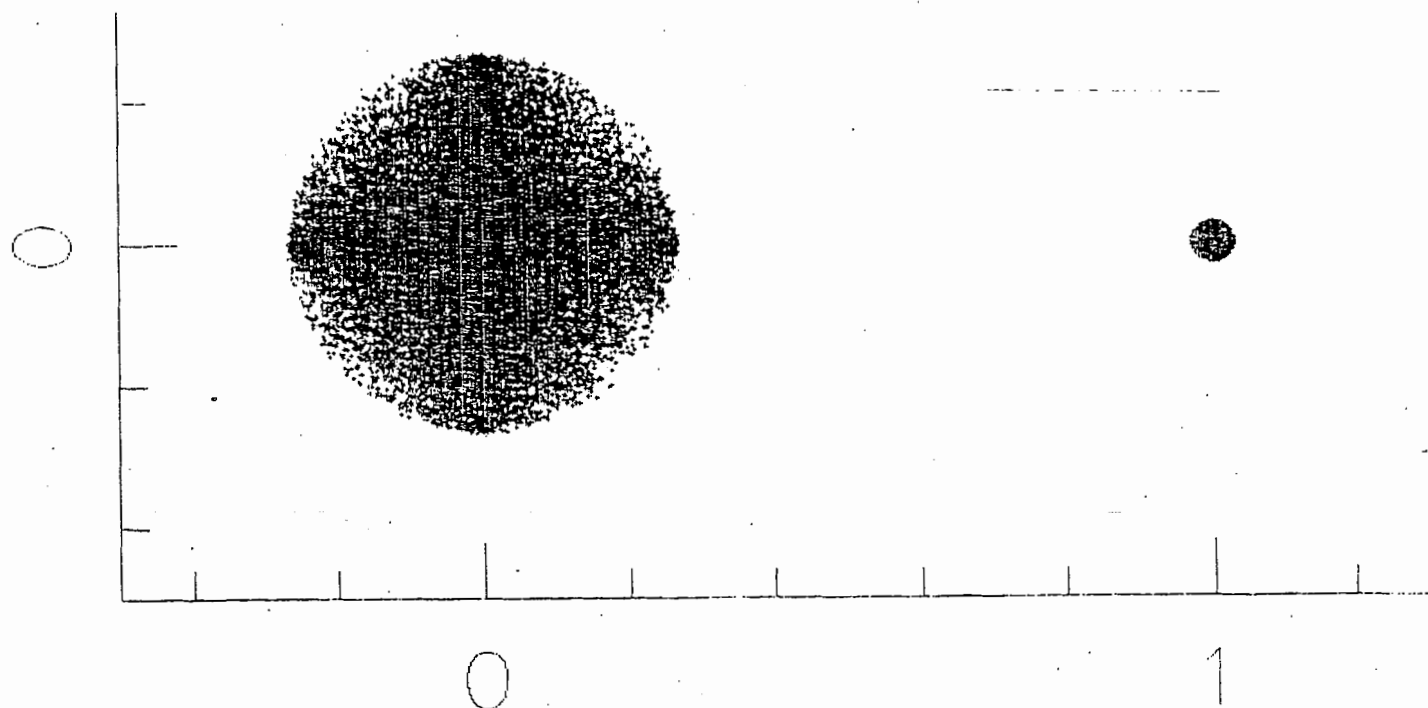


Fig.8: Rappresentazione grafica del modello ottenuta visto da una direzione perpendicolare al piano orbitale.