

Determinazione degli elementi orbitali fotometrici di PW Cyg:  
 Problemi di convessità della funzione obbiettivo nella soluzione  
 della curva di luce di una variabile ad eclisse.

A) Introduzione

PW Cyg (VV156) e' una variabile ad eclisse scoperta da BAADE nel 1928 e successivamente osservata da W. J. MILLER (1965) il quale ne ottenne una buona curva di luce fotografica. Le caratteristiche di questa binaria ad eclisse sono le seguenti (Miller, 1965):

$$AR(1900) = 19^{\text{h}} 52^{\text{m}} 59^{\text{s}}.55 \quad DB(1900) = 39^{\circ} 14' 30''.5$$

$$\text{Tipo: EA} \quad \begin{aligned} \text{Max} &= 13.30 \pm 0.01 \text{ mpg} \\ \text{Min. 1} &= 14.54 \pm 0.01 \text{ mpg} \end{aligned}$$

L'effemeride relativa al minimo primario eliocentrico risulta essere la seguente:

$$\text{Min. 1} = \text{JD}_0 2442256.665 + 2^{\text{d}}.0217791 * E$$

$$\pm 1 \quad \pm 7$$

ottenuta utilizzando 19 istanti di minimo osservati fotograficamente che si stendono su un intervallo di tempo di poco inferiore ai 54 anni e raccolti e analizzati da MILLER.

Il tipo spettrale risulta tutt'ora incognito e fino ad ora la curva di luce risulta essere irrisolta per cui uno degli scopi del presente lavoro sara' quello di ottenere la prima serie di elementi orbitali fotometrici di questo sistema binario.

B) Osservazioni

Il materiale osservativo nel caso della stella in esame e' costituito da un insieme di 22 punti normali ottenuti da MILLER sulla base di 1502 osservazioni ricavate da altrettante lastre fotografiche. Il diagramma di questi punti normali e' mostrato nella figura 1. La banda spettrale a cui possono essere riferite le tutte le osservazioni e' il blu fotografico a circa 4250 A di lunghezza d'onda. Cio' deriva da indicazioni fornite da MILLER intorno al materiale fotografico usato e alle tecniche impiegate nella riduzione delle lastre. La precisione che puo' essere ragionevolmente associata ad ogni punto normale puo' essere stimata tenendo conto che la sequenza di confronto e' composta da sei stelle la cui mag. possiede una incertezza media di .03 magnitudini e che ciascun punto normale e' composto da 100 misure nelle fasi di massimo (fuori eclisse) e di minimo secondario e da circa 20-25 misure nelle fasi appartenenti al minimo primario.

Da questi fatti risulta che ogni punto normale nel Min. 1 possiede in media una incertezza stimabile intorno a circa .006 mag., mentre l'incertezza stimata ed associabile ad ogni punto normale nelle fasi di fuori eclisse dovrebbe aggirarsi intorno a .003 mag. Tali fatti ci permettono di considerare accurata la curva di luce di PW Cyg e come tale aspettarci una buona convergenza dell'algoritmo impiegato nella sua soluzione.

C) Elaborazione dei dati

Quanto detto in precedenza ci dice che la curva di luce di PW Cyg puo' essere considerata di buona qualita' e quindi ci si puo' aspettare una affidabile soluzione di essa da parte degli algoritmi impiegati. Anche nel presente caso la soluzione e' stata ottenuta per mezzo del programma E.V.L.C.S. (Eclipsing Variables Light Curve Solution) il quale impiega delle tecniche che sono tipiche della Ricerca Operativa. I parametri liberi che il programma permette di ottimizzare sono, come e' ben noto (GASPANI, 1986), 13, ma di questi ne sono stati ottimizzati solamente 7 e cioe': k, G1, G2, L1, lo(oc), lo(tr) e mo, mentre i valori di L3 (terza luce), Δφ<sub>0</sub> (phase shift al minimo principale) ed i coeff. c(j), con j=1...4, dovuti agli eff. di prossimita', sono stati fissati uguali a zero. La soluzione ha mostrato che PW Cyg possiede una eclisse di tipo parziale, tale fatto talvolta, come nel presente caso, solleva qualche problema in fase di ottimizzazione delle luminosita' ai due minimi: lo(oc) e lo(tr). Sostanzialmente il problema ha due aspetti e cioe':

- La funzione obbiettivo S(...) puo' non essere strettamente convessa nello spazio dei parametri considerati.
- Se anche la convessita' della S(...), in tale spazio, viene rilevata, l'ottimo globale puo' essere situato in corrispondenza di valori di uno o di entrambi i parametri liberi non astrofisicamente sensati.

Tale fenomeno e' dovuto al fatto che la funzione obbiettivo S(...) vista nel piano [lo(oc)-lo(tr)] mostra un andamento simile a quello mostrato schematicamente nella figura 2 cioe' si nota che nella direzione lo(oc) la S(...) possiede una struttura a corridoio ed in piu' il fondo di esso e' praticamente piano.

Tale fatto implica prima di tutto una scarsa determinazione nel punto di ottimo globale determinato usando qualsiasi algoritmo di ricerca, in piu' nel seguente caso, rappresenta una certa indipendenza dei valori degli elementi orbitali dal valore della profondita' del minimo primario (almeno nell'intervallo: .30 < lo(oc) < .40 che riguarda il caso presente). In direzione di lo(tr), che presentemente rappresenta la luminosita' all'istante del minimo secondario, la curvatura della funzione obbiettivo e' pero' decisamente piu' marcata, in ogni caso si rileva che la sua convessita' e' assicurata dal fatto che la matrice Hessiana della S(...) risulta positiva e definita. L'ottimo globale pero' va a situarsi in corrispondenza di un valore di lo(tr) pari a:

$$\text{opt}\{ \text{lo}(\text{tr}) \} = 1.03 \pm .05$$

il che corrisponde ad un minimo secondario di profondita' praticamente nulla. Non e' ben chiaro se questo fatto sia solamente un effetto numerico dovuto a qualche ragione interna all'algoritmo di ottimizzazione oppure se effettivamente la stella di diametro maggiore sia realmente caratterizzata da una

12 FEB. 1987

luminosita' estremamente ridotta; in ogni caso tale valore e' quello che minimizza la devianza: .

$$S(\dots) = \sum_{j=1}^{j=N} \{ l(\text{obs}) - l(\text{calc}) \}^2$$

la quale come e' noto rappresenta anche la funzione obbiettivo che viene minimizzata nell' E.V.L.C.S. .  
I valori dei parametri orbitali che sono risultati essere i piu' soddisfacenti alle osservazioni sono mostrati nella tab. I.

=====  
Tab. I : Elementi orbitali fotometrici ottimali  
-----

Min. 1 = Occultazione	$\lambda_{eq} = 4250 \overset{0}{\text{A}}$
r1 = .20 ± .01	u1 = .40 (assunto)
r2 = .24 ± .01	u2 = .60 (assunto)
i = 79.9 ± 0.1	J2/J1 = 1.3E-09 ± 3.0E-10
L1 = 1.00 ± .05	I2/I1 = 1.4E-09 ± 3.0E-10
L3 = 0.00 ± .05	T2/T1 = 6.1E-03 ± 3.0E-04
L3 = 0.00 (assunto)	lo(oc) = .37 ± .05
mo = 13.32 ± .01	lo(tr) = 1.00 ± .05

-----  
σ(1) = .009                      C.C. I = .9995

In totale le valutazioni della funzione obbiettivo richieste per giungere alla soluzione sono state 70.  
Nella tabella I sono riportati anche σ(1) e il parametro di consistenza interna: C.C. I. .  
Il primo risulta molto buono tenuto conto che si ha a che fare con una curva di luce fotografica, in piu' tale valore risulta in buon accordo con la incertezza mediamente stimata per ogni singolo punto normale e listata precedentemente nella sezione B).  
Il secondo risulta molto vicino a 1.0, tale fatto assicura che i valori ottenuti e listati nella tabella I sono significativi.  
La figura include la curva di luce teorica ottenuta dai dati della tab. I e plottata tra i punti normali: l'accordo risulta eccellente.

D) Discussione  
-----

L'analisi dei dati eseguita come al solito usando il programma E.V.L.C.S. ha condotto ad un modello accettabile per il sistema binario PW Cyg. In definitiva si ha a che fare con una binaria di tipo Algol classico la quale mostra le caratteristiche comuni a questa classe di stelle. Il suo rapporto di massa, stimato sulla base del raggio frazionario della stella eclissante al minimo principale, risulterebbe essere:

$$q = m2/m1 \approx 0.20$$

Essendo incognito il tipo spettrale non e' possibile operare alcuna ragionevole stima relativamente alla temperatura propria di ciascuna stella che compone il sistema e neppure e' possibile sbilanciarsi su qualche ipotesi di tipo evolutivo visto che i dati in nostro possesso riguardano solamente la curva di luce.  
Addizionalmente e' presente anche la questione relativa alla molto ridotta luminosita' della stella piu' grande ed evoluta, cio' complica ovviamente qualsiasi tentativo di costruire un modello del sistema piu' perfezionato di quello che viene dato in questa sede.  
La curva di luce osservata (punti normali) mostra un minimo secondario quasi inesistente e cio' sarebbe in evidente accordo con quanto trovato durante la analisi dei dati, pero' prima di essere in grado di esprimere opinioni di un certo peso sara' necessario disporre (e analizzare) dei dati fotometrici di precisione maggiore unitamente ad augurabili osservazioni spettroscopiche.

E) Conclusione  
-----

Nel presente lavoro e' stata ottenuta la prima soluzione fotometrica della curva di luce di PW Cyg.  
Addizionalmente sono stati evidenziati dei fenomeni numerici associati allo algoritmo risolutivo utilizzato nella elaborazione dei dati.  
La soluzione di curve di luce di altri sistemi binari caratterizzati da una orbita sconosciuta e da una curva di luce sufficientemente precisa sara' l'argomento dei prossimi lavori.

A. Gaspani

F) Bibliografia  
-----

Baade W. : 1928, A.N. 232, 65.  
Gaspani A. : 1986, Circ. UAI-EV No 03.  
Miller W.J. : 1965, Ric. Astr. 7, 205.

12 FEB. 1967

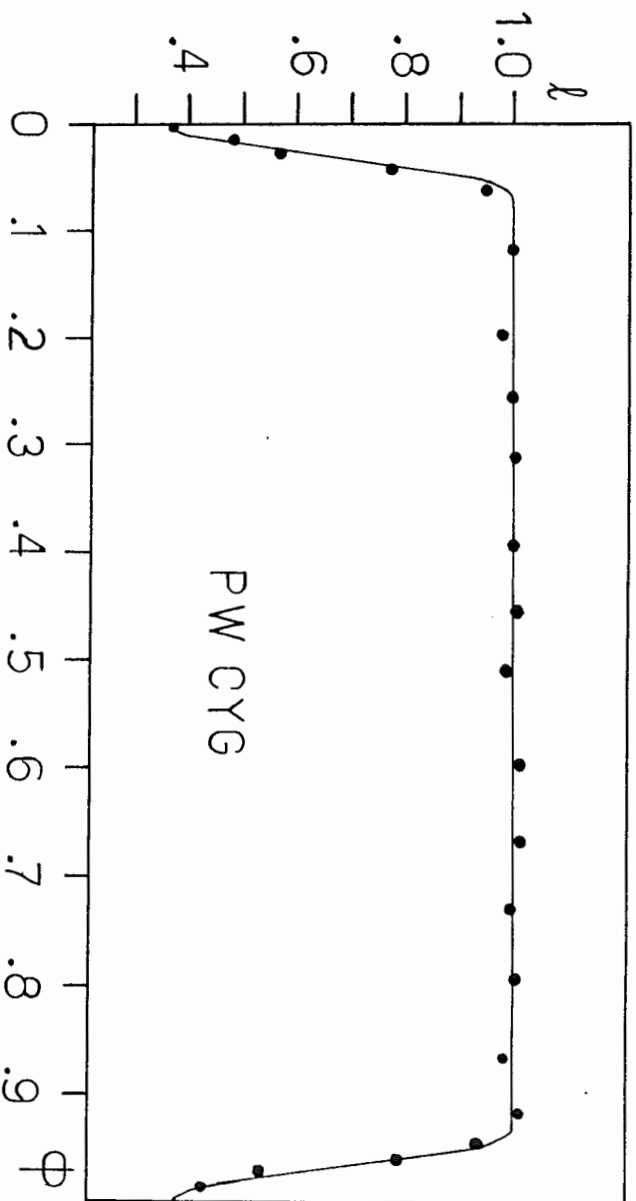


Fig. 1 : Curva di luce sintetica plottata tra i punti normali sperimentali.

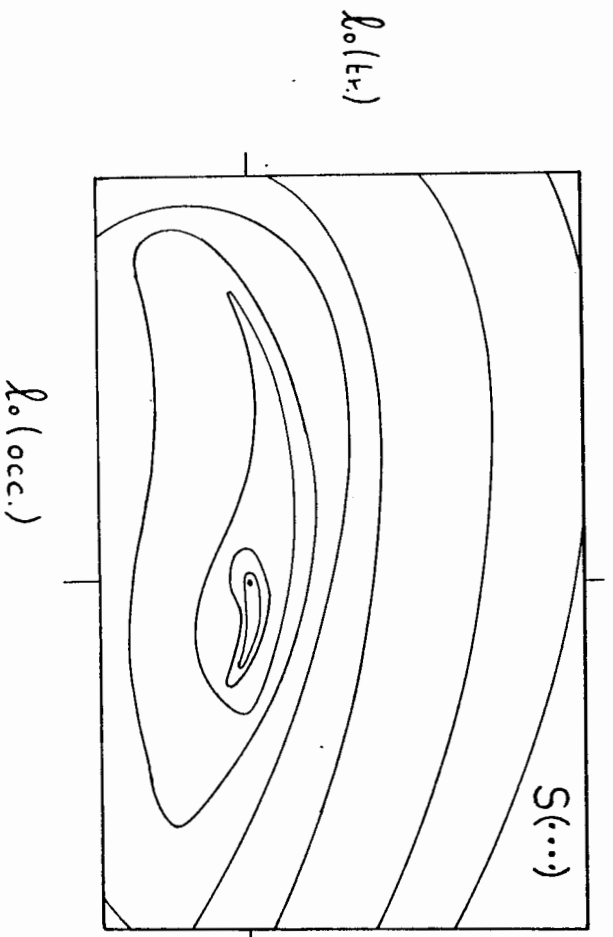


Fig. 2 : Andamento schematico delle curve di livello della funzione  $S(\dots)$  nel piano  $[\lambda_0(\text{occ.})-\lambda_0(\text{tr.})]$ .

