

1401.1986

La soluzione di una curva di luce di una variabile ad eclisse vista come un problema NDO.

*) Analisi della curva di luce di GT Cyg.

A) Introduzione

Come e' ben noto (Gaspari 1985, 1986) la soluzione di una curva di luce di una variabile ad eclisse costituisce un problema di Programmazione Non Lineare (NLP).

Tra i vari algoritmi risolutivi esistenti e' compreso anche il programma E.V.L.C.S (Eclipsing Variables Light Curve Solution) messo a punto da Gaspari (1984, 1985, 1986).

Nel modello E.V.L.C.S. la funzione obiettivo e' definita come la devianza tra la curva di luce osservata e quella teoricamente costruita nei punti corrispondenti alle osservazioni.

In parole povere:

$$S(W) = \sum_{j=1}^N \{l(\text{obs})_j - l(\text{calc})_j\}^2$$

dove $\{W\}$ e' il vettore che contiene i parametri liberi (legati agli elementi orbitali) che devono essere ottimizzati.

In particolare (Gaspari, 1986) si ha:

$$\{W\} = [k, G_1, G_2, \dots, l_0(\text{occ}), l_0(\text{tr})]^T$$

La soluzione ovviamente richiede di minimizzare $S(W)$ determinando il vettore $\{W\}$ che contiene i valori ottimali dei parametri liberi.

A rigor di logica esistono due fatti importanti di cui e' necessario tenere conto e cioe' i seguenti:

- 1) Data la struttura della $S(W)$ non ci sono assicurazioni riguardanti l'esistenza e la continuita' delle sue derivate in ogni punto di essa (almeno nel range in cui ciascun parametro libero conserva un significato fisico).
- 2) L'ottimizzazione della funzione obiettivo viene trattata nell'E.V.L.C.S. come un problema di decomposizione in quanto la struttura della $S(W)$ e' tale che risulta conveniente ottimizzare separatamente differenti gruppi di variabili, magari per mezzo di differenti procedure numeriche. Tale fatto e' messo bene in evidenza in (Gaspari, 1986) dove viene mostrato che l'E.V.L.C.S. impiega ben tre differenti tecniche di ottimizzazione a seconda della convenienza in relazione a ciascun tipo di parametro libero trattato.

I due fatti elencati suggeriscono di considerare il problema di analizzare e risolvere una curva di luce di una variabile ad eclisse come un problema di tipo NDO (Non Differentiable Optimization) con la possibilita', trattandolo come tale, di rendere piu' ottimale il processo risolutivo.

Nel presente lavoro tale punto di vista verra' considerato durante la soluzione orbitale della curva di luce di GT Cyg e verranno discussi i risultati ottenuti.

B) Applicazione a GT Cyg

La stella in esame e' una variabile ad eclisse scoperta da Baade nel 1933 e successivamente osservata da W.J. Miller (1965) il quale ne ha ottenuto una buona curva di luce fotografica.

Le caratteristiche generali di questa stella sono le seguenti:

AR(1950) = 19^h 56^m 20^s

DB(1950) = +38° 41' .3

Tipo: EA/SD

Max = 14.76 ± 0.02 mpg

Sp: A5

Min. 1 = 17.40 ± 0.02 mpg

Min. 2 = 14.80 ± 0.02 mpg

L'effemeride relativa al minimo primario eliocentrico, ottenuta sulla base di 24 istanti di minimo fotograficamente determinati e che si stendono lungo un arco di 8062 giorni, risulta essere:

$$\text{Min. 1} = \text{JDe } 2433408.553 \pm 1 + 3.335589 \pm 3 \cdot E$$

calcolata da W.J. Miller.

Nonostante la ridotta luminosita' di questa stella e' disponibile una stima del tipo spettrale, dovuta a BAADE e che risulta essere A5 come precedentemente indicato.

Gli elementi orbitali fotometrici risultano ancora sconosciuti di conseguenza lo scopo del presente lavoro sara' anche la soluzione della curva di luce ottenuta da Miller e la loro determinazione.

C) Osservazioni

Il materiale osservativo disponibile e' rappresentato da una curva di luce composta da 22 punti normali ottenuti con 1493 lastre fotografiche complessivamente.

I punti normali sono formati mediamente da 20÷30 osservazioni nel tratto corrispondente al minimo principale e da 100 osservazioni nei tratti relativi al minimo secondario e alle fasi di fuori eclisse.

L'incertezza che e' possibile assegnare ad ogni punto normale puo' essere ragionevolmente stimata inferiore a 0.02 magnitudini.

Per quanto riguarda invece la banda spettrale in cui la fotometria e' stata eseguita si puo' ragionevolmente fissare, sulla base di quanto indicato da Miller intorno al materiale fotografico usato e alle tecniche impiegate, una lunghezza d'onda standard di circa 4250 Å.

I punti normali sono mostrati graficamente nella figura 1.

opt{lo(occ)} = .132 opt{ko} = .520

che risultano poco diversi da quelli ottenuti precedentemente nel caso NDO. Ora e' chiaro che in lo(occ) l'accordo e' ottimo tenendo conto che la incertezza sul suo valore (fornita dall' E.V.L.C.S.) ammonta a .011, mentre nel caso di ko l'incertezza risulta essere di .006.

Va anche detto che i valori di tali incertezze sono solo delle stime in quanto una rigorosa teoria di propagazione degli errori durante i processi di ottimizzazione non e' stata ancora messa bene a punto, in ogni caso anche se la discrepanza fra i due valori di ko ottenuti con le due procedure risulta essere maggiore del margine d'errore non si e' ritenuto opportuno giudicarla significativa.

Per quanto riguarda i valori degli altri parametri liberi le discrepanze sono comprese entro i limiti imposti dalle loro barre d'errore per cui sono stati ritenuti coincidenti.

Le tabelle I e II riportano rispettivamente i valori degli elementi del vettore ottimale {W*} e degli elementi orbitali fotometrici da esso ricavati.

0) Soluzione della curva di luce

0.1 --Procedura NDO--

La elaborazione dei dati e' stata eseguita usando il programma E.V.L.C.S. (livello #18) applicato al set di punti normali mostrati nella figura 1. Come e' noto (Gaspari, 1986b) l'algoritmo incluso nel programma permette di trattare fino a 13 parametri liberi.

Durante la presente analisi e' stata imposta la restrizione di fissare i, c2, c3 e c4 (parametri che esprimono il contributo degli effetti di prossimita') uguali a zero in quanto la curva di luce non mostrava apprezzabili tracce di tali effetti.

I parametri liberi k, G1, G2, L1, lo(occ), lo(tr) e c0 sono stati sottoposti ad ottimizzazione, mentre L3 (terza luce) e Δφ (shift di fase al minimo 1) sono stati assunti nulli.

In totale la soluzione ha interessato 7 parametri liberi. Inizialmente e' stato ottimizzato c0 separatamente ottenendo da esso il valore della mag. all'istante di quadratura (φ=90° e 270°):

m0 = 14.78 ± 0.02

Il secondo gruppo di parametri ad essere ottimizzato e' stato quello composto da: k, G1, G2, L1 e lo(tr) la cui ottimizzazione e' stata eseguita separatamente per ogni valore della luminosita' al minimo principale lo(occ) la quale veniva fatta variare in vicinanza del valore stimato sulla curva di luce e assunto quale valore iniziale per la sua ottimizzazione.

Tale modo di procedere e' in accordo con la natura NDO del problema in esame e ha richiesto solamente 40 valutazioni della funzione obiettivo per giungere alla soluzione completa.

A tal fine oltre al programma E.V.L.C.S. e' stato usato un programma supplementare denominato **CONFIL** il quale permette di mappare la funzione obiettivo S(lo(occ), ...), di esplorarla e di cercarne l'ottimo globale determinando i valori ottimali dei parametri liberi.

Nel presente caso la presenza di vincoli suggeriti dalla geometria del sistema binario ha permesso di definire solamente lo(occ) e k come parametri controllanti, mentre tutti gli altri venivano aggiustati per ogni combinazione di questi due.

Sulla base del lavoro eseguito con il **CONFIL** e' stata costruita la mappa della sezione della S(W) nel piano [lo(occ)-k] che e' mostrata nella figura 2. L'ottimizzazione ha portato ai seguenti valori ottimali per lo(occ) e k:

opt{lo(occ)} = .133 opt{ko} = .510

La funzione obiettivo ha mostrato un solo ottimo (quello globale) situato nella zona dell'iperspazio dei parametri corrispondente alla ipotesi di occultazione al minimo principale.

0.2 --Procedura NLP tradizionale--

Applicando invece l' E.V.L.C.S. nella sua forma tradizionale, ponendo anche lo(occ) tra i parametri liberi e ottimizzando simultaneamente tutti i parametri, sono stati ottenuti per lo(occ) e k i seguenti valori:

=====
Tab. I: Elementi del vettore ottimale {W*}
=====

m0 = 14.78 ± .02	lo(occ) = .13 ± .01
ko = .520 ± .006	lo(tr) = .96 ± .01
G1 = .052 ± .001	sigma(1) = .003
G2 = .011 ± .002	C.C.I. = .8772
L1 = .87 ± .01	

=====
Tab. II: Elementi orbitali fotometrici
=====

Min. 1 = Occultazione	λ = 4250 Å
r1 = .121 ± .002	J2/J1 = .042 ± .002
r2 = .230 ± .003	I2/I1 = .044 ± .002
i = 83.6 ± 0.4	T2/T1 = .458 ± .006
L1 = .87 ± .01	u1 = .50 (assunto)
L2 = .13 ± .01	u2 = .60 (assunto)

La curva di luce teorica ottenuta sulla base degli elementi orbitali riportati nella tabella II e' mostrata a tratto continuo nella figura 1. L'accordo risulta eccellente.

IE) Discussione

Osservando i valori dei parametri orbitali ottenuti si nota che QT Cyg dovrebbe essere un sistema di tipo Algol classico con la componente secondaria piu' evoluta della sua compagna.

1 NOV 1985

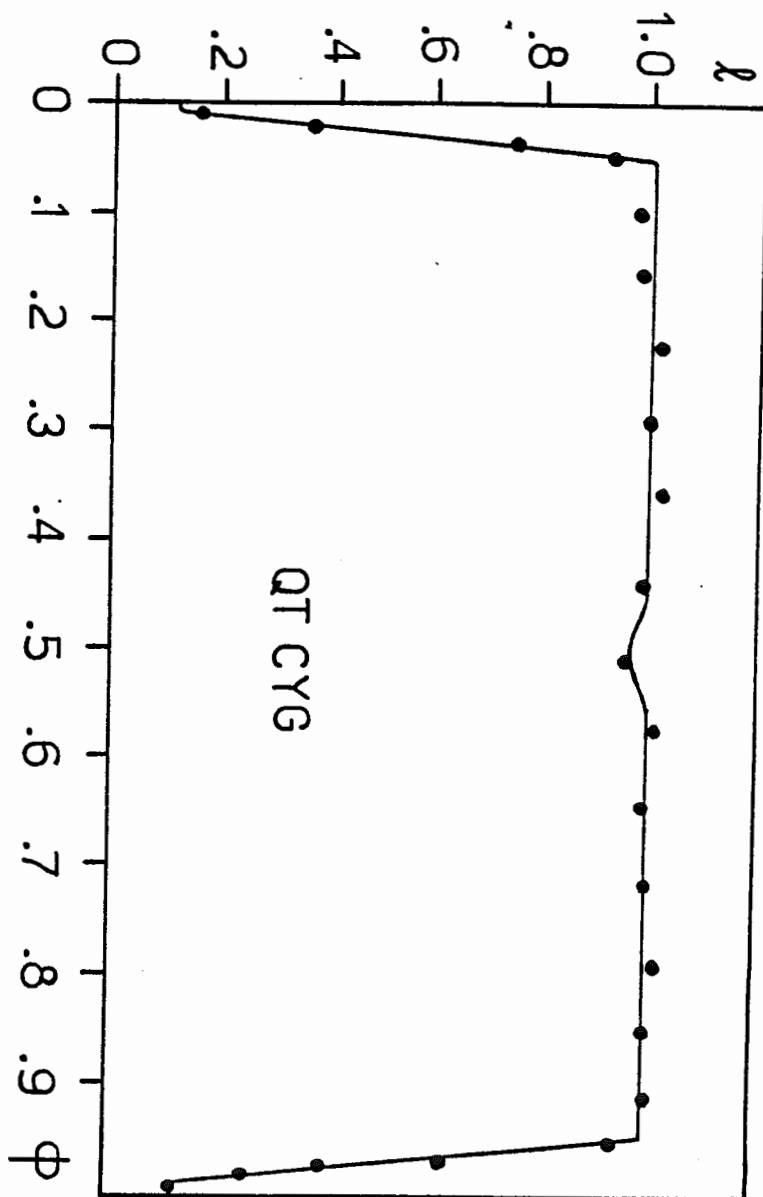


Fig. 1 : Curva di luce teorica ottenuta dagli elementi di tab. II plottata tra i punti normali ricavati dalle osservazioni.

Il rapporto di massa che dovrebbe competere al sistema, stimato sulla base del raggio frazionario r_2 , dovrebbe essere circa:

$$q = 0.17$$

valore, del resto, in accordo con i valori tipici per i sistemi di tipo Algol.

Lo scopo del presente lavoro, pero' era si quello di ottenere il primo modello del sistema, ma anche l'analisi sperimentale di una procedura NDO per ottenere gli elementi orbitali fotometrici.

I risultati ottenuti mostrano che il problema della soluzione orbitale della curva di luce e' certamente un problema di tipo NDO.

In ogni caso e' stato notato che i due differenti punti di vista, sempre nell'ambito della Programmazione Non Lineare, conducono allo stesso modello per QT Cyg e con risultati praticamente coincidenti.

Tale fatto dimostra ancora una volta quanto sia flessibile un algoritmo di analisi basato su tecniche di ricerca operativa le quali possono condurre ad una sempre maggior efficienza negli algoritmi necessari alla soluzione di una curva di luce di una variabile ad eclisse.

Per quanto riguarda piu' propriamente il sistema binario si nota che il rapporto tra le intensita' di luminosita' e' molto a favore della componente piu' piccola.

Da questo fatto ci autorizza ad assegnarle il tipo spettrale A5 osservato da Baade e ad assumere per essa una temperatura T_1 di circa 8500°K.

Tale fatto implica che la secondaria possiede una temperatura T_2 di circa 3900°K e quindi uno spettro approssimativamente di tipo K5-K7 a seconda della classe di luminosita' a cui appartiene.

Avviata data la limitata precisione dei dati osservativi in nostro possesso non e' prudente spingersi piu' oltre nelle ipotesi astrofisiche intorno al sistema binario in esame.

Conclusioni

nel presente lavoro e' stata analizzata la curva di luce di QT Cyg al fine di ottenere la prima soluzione fotometrica.

il metodo usato e' stato il consueto programma E.V.L.C.S., additionally il calcolo e' stato ripetuto usando una diversa strategia risolutiva cioe' considerando il problema dal punto di vista della Ottimizzazione Non differenziabile.

La coincidenza dei risultati ha fornito il modello del sistema binario che e' stato esposto a grandi linee nel presente lavoro.

L'analisi di altri sistemi con orbita sconosciuta sara' l'argomento di lavori successivi.

A. Gaspani

Bibliografia

- Baade W. : 1933, A. N. 249, 269.
 Gaspani A. : 1984, R. I. Oss. Astr. Brera-Merate No. 10/84.
 Gaspani A. : 1985, R. I. Oss. Astr. Brera-Merate No. 2/85.
 Gaspani A. : 1986, UAI-EV Circ. No. 3.
 Gaspani A. : 1986b, in preparazione.
 Miller W. J. : 1965, Ric. Astr. 7, 4, 197.

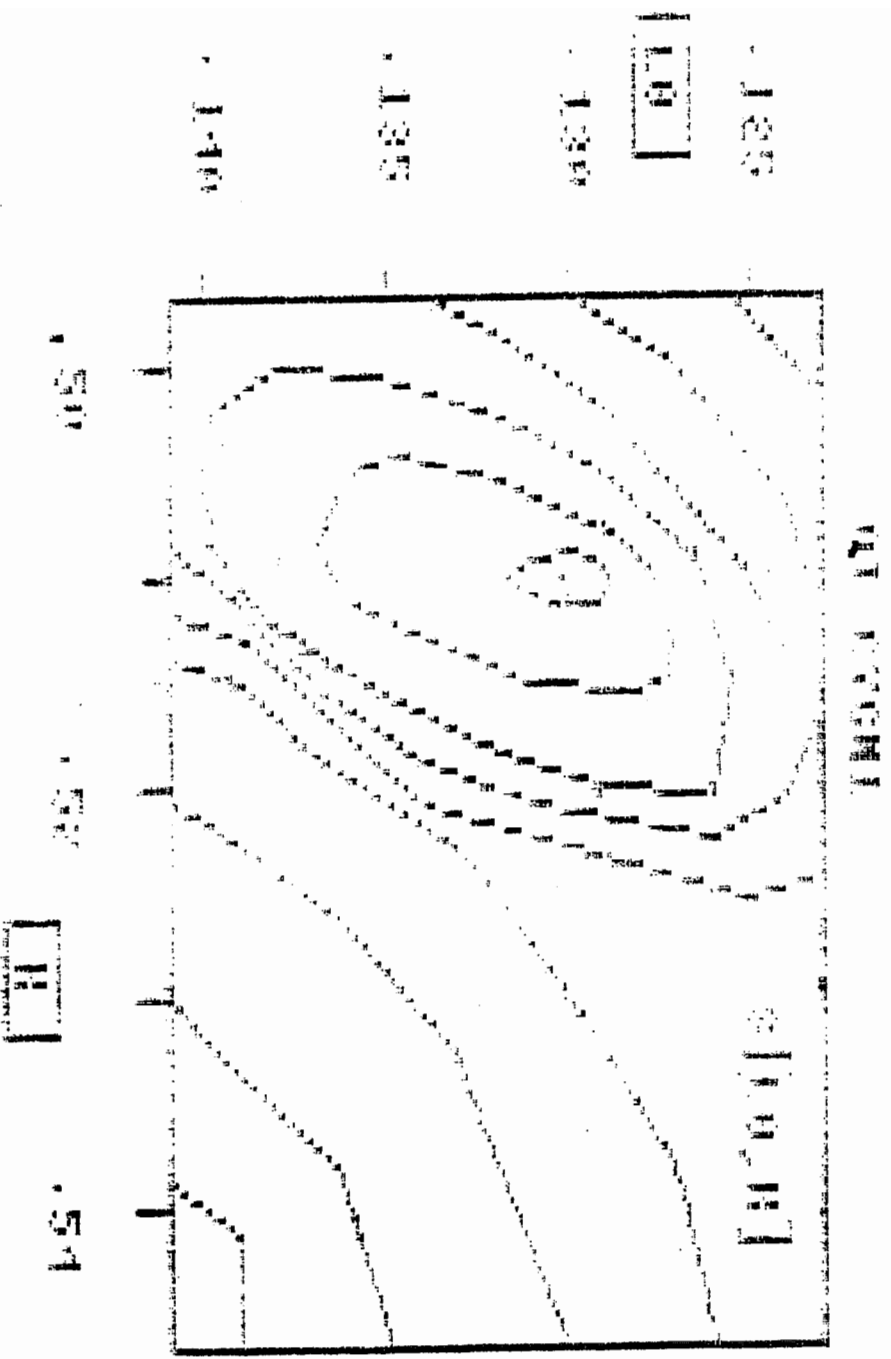


Fig.2 : Mappa della sezione della funzione obbiettivo nel piano (k-l) ottenuta assumendo la procedura NDD come strategia risolutiva.